

1. Position du problème

Dans le présent travail, nous avons étudié les effets des paramètres physiques et géométriques d'une cavité cylindrique verticale partiellement annulaire. Nous considérons pour cela, une cavité cylindrique verticale fermée de hauteur H et de rayon extérieur r_e , maintenue à une température T_f , contenant symétriquement, un cylindre vertical à sa base, de hauteur h et de rayon r_i , maintenue à une température T_c . L'espace entre les deux cylindres est rempli avec un fluide incompressible de viscosité cinématique ν et de diffusivité thermique α . La paroi supérieure et la paroi inférieure sont adiabatiques et les deux cylindres engendrent un gradient horizontal de température. Dans cette étude, en première étape, nous avons étudié l'effet du rapport de hauteur sur la structure de l'écoulement et sur la distribution de température. Pour chaque valeur du rapport de hauteur (X) nous avons fixé le rapport des rayons (K) à 2 et nous avons fait varier le nombre de Rayleigh de 10^3 à 10^5 , pour un rapport de forme $A=1$ et un nombre de Prandtl égale à 7,0, et en deuxièmes étape, nous avons étudié l'influence de la courbure (K) sur la structure de l'écoulement et sur la distribution de température. Pour chaque valeur du rapport de rayons nous avons fixé le rapport de hauteur (X) à 1/2 et nous avons fait varier le nombre de Rayleigh de 10^3 à 10^5 , pour un nombre de Prandtl=7,0,

Les écoulements susceptibles d'être développés dans cette cavité sont gérés par les équations de conservation de masse, de quantité de mouvement et de l'énergie. Il s'agit de déterminer la répartition de vitesse, de pression, de température à partir d'un modèle numérique utilisé pour résoudre notre système d'équations est fondé sur la méthode des volumes finis en utilisant l'algorithme SIMPLER.

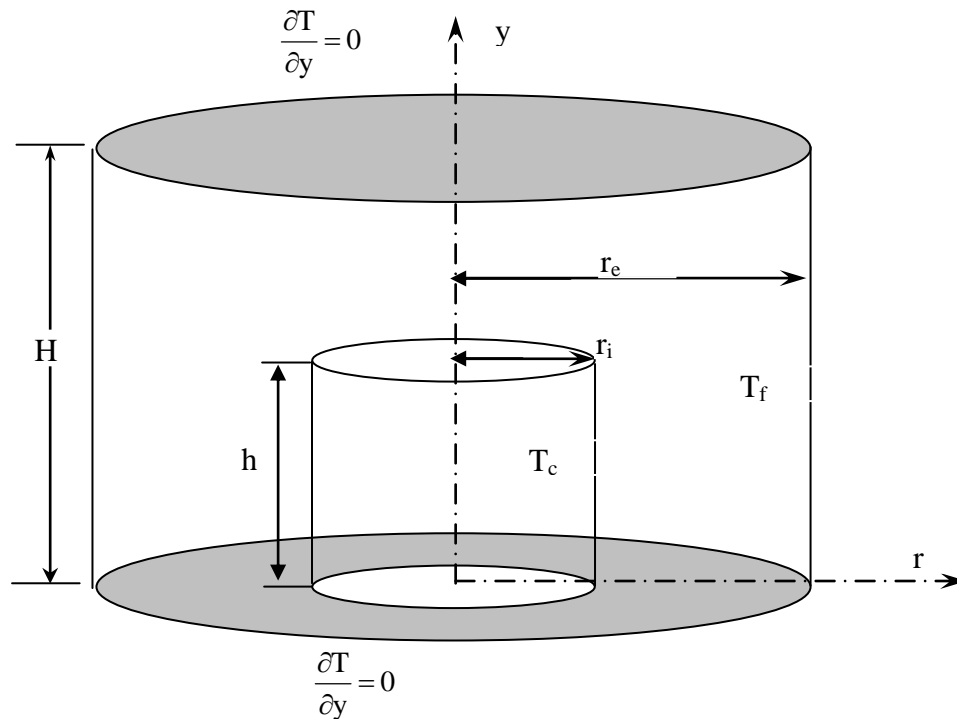


Fig.II.1: Modèle physique

2. Les équations de mouvement.

Hypothèses simplificatrices.

Les principales hypothèses prises en compte dans cette étude sont les suivantes:

- 1- L'écoulement de convection naturelle est provoqué par les forces de poussées thermiques et reste laminaire.
- 2- L'écoulement est bidimensionnel et axisymétrique suivant l'axe Oy.
- 3- Le fluide est newtonien, incompressible et ses propriétés physiques sont constantes la viscosité cinématique ν et de diffusivité thermique α sont constantes sauf pour la masse volumique qui dépend de sa température (approximation de Boussinesq) selon la relation suivante:

$$\rho(T) = \rho_0 [1 - \beta(T - T_0)] \quad (\text{II},1)$$

- 4- Les vitesses restant faibles, le travail des forces de pression et la production de chaleur par dissipation visqueuse sont négligeables.

Avec ces hypothèses, le mouvement du fluide ainsi que les répartitions de température T dans le milieu sont régies par les équations dimensionnelles suivantes:

Equation de continuité:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r \cdot u) + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (\text{II},2)$$

Equation de quantité de mouvement radial (suivant Or):

$$u \frac{\partial u}{\partial r} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \quad (\text{II},3)$$

Equation de quantité de mouvement axial (suivant Oy):

$$u \frac{\partial v}{\partial r} + v \frac{\partial v}{\partial y} = \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + g \cdot \left(\frac{\rho_\infty - \rho}{\rho} \right) \quad (\text{II},4)$$

Equation d'énergie:

$$u \frac{\partial T}{\partial r} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (\text{II},5)$$

3. Adimensionnement

3.1. Les grandeurs de référence:

Les grandeurs caractéristiques utilisées pour adimensionner le problème sont: la largeur de la cavité L , la vitesse, la pression et la température. Étant donné la symétrie angulaire, le problème est considéré bidimensionnel.

Notre modèle mathématique est mis sous forme adimensionnelle en se rapportant aux références suivantes:

$L_r = r_e - r_i :$	largeur de la cavité comme longueur de référence
$V_r = \frac{v}{L_r} :$	comme vitesse de référence
$P_r = \frac{\rho v^2}{L_r^2} :$	comme pression de référence
$\Delta T = T_c - T_f :$	écart de température entre parois chaude et froide comme écart de température de référence.

Par ailleurs, les températures de référence sont les valeurs moyennes

$$T_0 = \frac{T_c - T_f}{2}$$

En fonction des choix précédents, les grandeurs de référence associées au temps

$$\frac{L_r}{V_r} : \quad \text{temps de référence}$$

On en déduit la forme adimensionnelle des variables de notre problème:

$$(R, Y) = \frac{(r, y)}{L_r} \Rightarrow (R, Y) = \frac{(r, y)}{(r_e - r_i)}$$

$$(U, V) = \frac{(u, v)}{V_r} \Rightarrow (U, V) = \frac{(u, v)L_r}{v} \Rightarrow (U, V) = \frac{(u, v)(r_e - r_i)}{v}$$

$$P = \frac{p}{P_r} \Rightarrow P = \frac{pL_r^2}{\rho v^2} \Rightarrow P = \frac{p(r_e - r_i)^2}{\rho v^2}$$

$$\theta = \frac{(T - T_0)}{\Delta T} \Rightarrow \theta = \frac{(2T - T_c - T_f)}{2(T_c - T_f)}$$

$$\tau = \frac{tV_r}{L_r} \Rightarrow \tau = \frac{tv}{L_r^2} \Rightarrow \tau = \frac{tv}{(r_e - r_i)^2}$$

En tenant compte de ces adimensionnements, notre modèle mathématique devient:

Equation de continuité:

$$\frac{\partial(RU)}{R\partial R} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \quad (\text{II},6)$$

Equation de quantité de mouvement radial (suivant Or):

$$U \frac{\partial U}{\partial R} + V \frac{\partial U}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial R} + \frac{\partial^2 U}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial U}{\partial R} - \frac{U}{R^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \quad (\text{II},7)$$

Equation de quantité de mouvement axial (suivant Oy):

$$U \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial R} + V \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial Y} = - \frac{\partial P}{\partial Y} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial V}{\partial R} + \frac{\partial^2 V}{\partial R^2} + \frac{R_{aT}}{\text{Pr}} \theta \quad (\text{II},8)$$

Equation d'énergie:

$$U \frac{\partial \theta}{\partial R} + V \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \frac{1}{\text{Pr}} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial \theta}{\partial R} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right) \quad (\text{II},9)$$

3.2. Les paramètres caractéristiques du problème:

Les paramètres caractéristiques qui interviennent dans les équations adimensionnelles ci-dessus et dont les valeurs conditionnent les transferts chaleur dans la cavité sont

Des paramètres géométriques:

- Les facteurs de formes qui caractérisent l'allongement de la cavité:

$$A = \frac{H}{L_r}$$

H: la hauteur du cylindre extérieur.

$$a = \frac{h}{L_r}$$

h : la hauteur du cylindre intérieur.

- Le rapport des hauteurs qui caractérise la variation de la hauteur du cylindre inférieur:

$$X = \frac{h}{H}$$

- Le rapport des rayons qui caractérise la courbure des parois verticales:

$$K = \frac{r_e}{r_i}$$

Des paramètres physiques:

- Le nombre de Rayleigh:

$$Ra = \frac{g\beta\Delta T L_r^3}{\nu\alpha}$$

- Le nombre de Prandtl:

$$\text{Pr} = \frac{\nu}{\alpha}$$

Par ailleurs, les transferts de chaleur sont représentés par les nombres de Nusselt. Ce nombre adimensionnel se calcule en fonction des grandeurs locales de température le long de chaque paroi verticale

$$Nu = \frac{-\lambda \frac{\partial T}{\partial r} L_r}{\lambda \Delta T} = - \frac{\partial \theta}{\partial R}$$

$$\overline{Nu} = \frac{1}{A} \int_0^A Nu(R=1, Y) dY \quad (\text{II},10)$$

4. Les conditions aux limites.

En tenant compte de l'adimensionnement des grandeurs physiques, les conditions aux limites sont:

$R = \frac{1}{K-1}$	$\theta = \frac{1}{2}$	$U=V=0$
$R = \frac{K}{K-1}$	$\theta = -\frac{1}{2}$	$U=V=0$
$Y=0, A$	$\frac{\partial \theta}{\partial Y} = 0$	$U=V=0$
$Y=XA \text{ et } 0 \leq R \leq \frac{1}{K-1}$	$\theta = \frac{1}{2}$	$U=V=0$

Vu que notre domaine d'étude est symétrique par rapport à l'axe vertical (Oy), (Fig.II.2), le calcul s'effectue sur la moitié de la zone contenant le fluide. Les conditions aux limites au niveau de l'axe de symétrie (Oy) deviennent:

$\frac{\partial \theta}{\partial R} = 0$	$\frac{\partial V}{\partial R} = 0$	$U=0$
--	-------------------------------------	-------

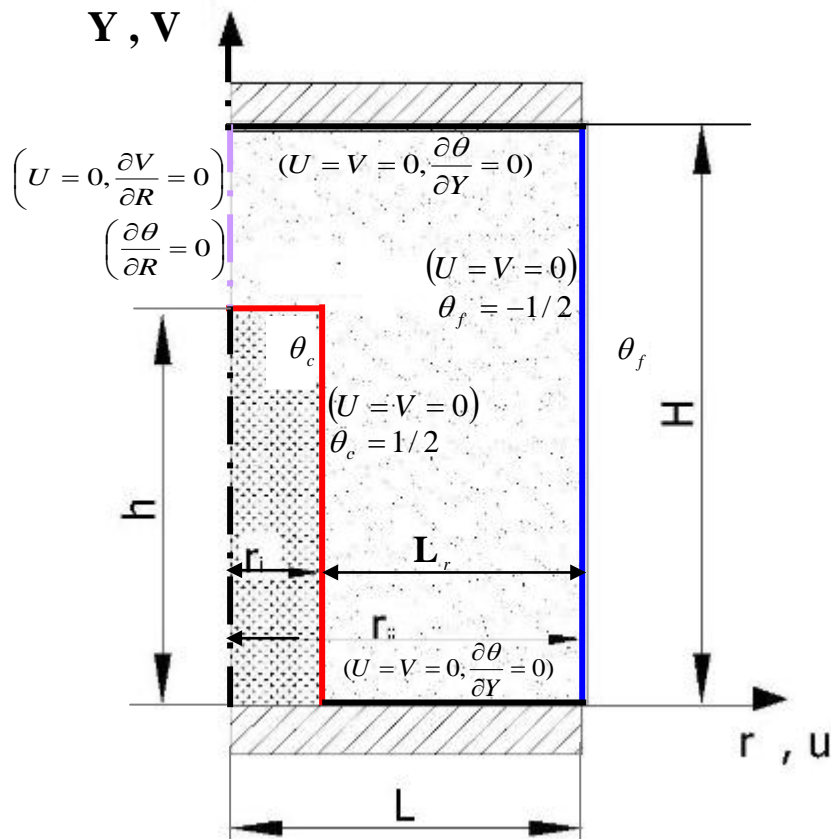


Fig.II.2: Configuration géométrique du modèle physique d'une cavité annulaire et conditions aux limites

5. Méthode numérique de résolution.

Le modèle numérique retenu pour résoudre le système d'équations (II.6)-(II.9), est fondé sur une méthode des volumes finis développée par Patankar [1]. Cette méthode s'appuie sur une discrétisation du domaine de calcul en différents noeuds, chacun d'entre eux étant entouré d'un volume élémentaire (Fig.II.3) sur lequel on intègre les équations aux dérivées partielles (II.6)-(II.9).

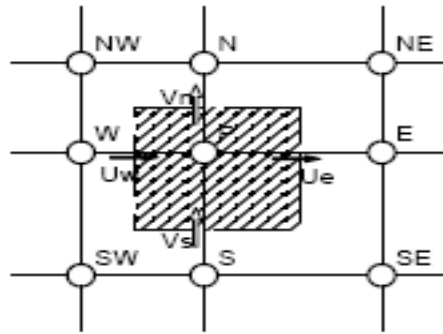


Fig.II.3: Volume de contrôle

L'intégration de l'équation (II.6)-(II.9) sur le volume de contrôle représenté par la figure II.3 mène à une relation algébrique entre les valeurs de la variable Φ au centre de la maille et sur les faces repérées, par convention, les situant par rapport aux points cardinaux E (Est), W (Ouest), S (Sud), N (Nord).

$$A_P \phi_P = A_E \phi_E + A_W \phi_W + A_N \phi_N + A_S \phi_S + B \quad (\text{II.11})$$

- La variable ϕ peut être U, V, θ .
- B: représente le terme source volumique.

Les coefficients, A_E , A_W , A_N , A_S tiennent compte de la convection et de la diffusion à travers les quatre faces du volume de contrôle et sont déterminés à partir d'un schéma hybride. La méthode des volumes finis a pour avantage de garder les équations sous leur forme primitive contrairement aux méthodes fondées sur une formulation par fonction de courant-vorticité.

Le problème du couplage pression vitesse est résolu en introduisant un champ de vitesses supposé connu permettant de déterminer le champ de pression à partir de l'équation de continuité. On utilise alors une procédure itérative de correction de pression et de vitesse de manière à ce que l'équation de continuité soit satisfaite. Nous avons utilisé pour cela l'algorithme SIMPLER dont les grandes lignes sont présentées ci-après.

Cet algorithme nécessite que la discrétisation des champs de vitesse et de pression ne se fasse pas sur le même maillage. On doit ainsi définir:

- Un maillage principal centré pour calculer les variables P ainsi que θ .
- Un maillage décalé pour calculer U et V, dont les noeuds sont localisés à mi-distance de ceux du maillage principal, comme l'indique la figure II.4.

Chaque composante U ou V du vecteur vitesse est décalée seulement suivant sa propre direction. Dans le maillage principal et décalé, les propriétés de conservation restent vérifiées.

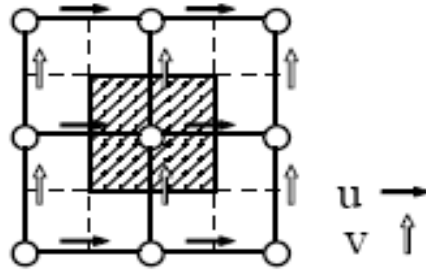


Fig.II.4 Maillage utilisé dans l'algorithme SIMPLER

5.1. Algorithme SIMPLER.

L'algorithme SIMPLER est une amélioration de l'algorithme SIMPLE (Semi-Implicit Pressure Linked Equation) initialement développé par Patankar [1]. Il est basé sur l'utilisation d'un champ de vitesse estimé (U^*, V^*) qui permet une première évaluation du champ de pression P^* avec laquelle les équations de quantité de mouvement sont résolues pour obtenir les composantes U et V.

Les grandes lignes de l'algorithme SIMPLER dont une présentation plus détaillée est donnée, peuvent se résumer comme suit:

- 1- Donner un champ de vitesse initial.
- 2- Calculer les coefficients pour les équations de quantité de mouvement sans gradient de pression et déterminer les pseudo-vitesses U^* et V^* .
- 3- Calculer les coefficients de l'équation de pression déduite de l'équation de continuité et la résoudre pour obtenir un champ de pression.
- 4- Résoudre les équations de quantité de mouvement en U et V pour obtenir le champ de vitesse.
- 5- Résoudre l'équation en P' (erreur effectuée sur la pression).
- 6- Corriger le champ de vitesse sans corriger le champ de pression
- 7- Résoudre l'équation de température.
- 8- Vérifier les critères de convergence, sinon reprendre le calcul à partir de l'étape 3.
- 9- Vérifier le temps final, sinon reprendre à partir de l'étape 2.

5.2. Résolution des équations et convergence

Il s'agit de résoudre aux différents stades du calcul des systèmes de la forme :

$$A_P \phi_P = A_E \phi_E + A_W \phi_W + A_N \phi_N + A_S \phi_S + B \quad (\text{II.11})$$

La méthode de résolution classique consiste à résoudre ces équations en bloc sur une ligne (à R ou Y constant) qui se déplace de façon à balayer l'ensemble du domaine de calcul. Cette méthode est itérative et consiste à résoudre, à chaque itération, N systèmes tridiagonaux où N est le nombre de lignes dans la direction de balayage.

Le test d'arrêt de processus itératif est fondé sur l'observation des résidus des équations de quantité de mouvement, et de la température. Ces résidus peuvent être définis localement pour chaque variable Φ :

$$R_\phi = \sum_i A_i \phi_i + B - A_p \phi_p \quad (\text{II.12})$$

Le critère d'arrêt des itérations est:

$$\left| \sum_{i,j} R_{\phi,i,j} \right| \leq \varepsilon$$

ε étant un infiniment petit fixé en fonction de la précision de convergence voulue.

Nous avons obtenu des résultats avec différentes précisions de convergence, et nous avons constaté, sur les profils de vitesse verticale (V) par exemple (Fig.II.5), que les solutions n'évoluent pratiquement plus dès $\varepsilon = 10^{-4}$, car les trois courbes à partir de $\varepsilon = 10^{-4}$ jusqu'à $\varepsilon = 10^{-6}$ sont identiques. Nous avons donc gardé cette valeur pour la suite de nos calculs.

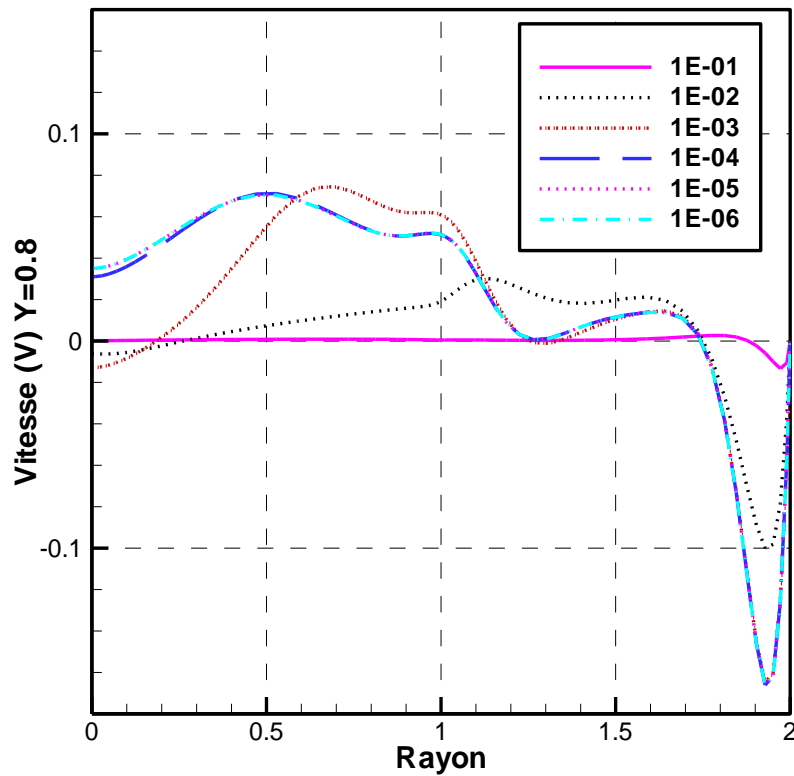


Fig.II.5: Profils de vitesse verticale (V) à différentes étapes itératives pour un maillage 58x58

6. Le maillage

On a adopté un maillage resserré au niveau des parois. Toutefois, d'autres zones à forts gradients peuvent apparaître au sein de l'écoulement en des positions difficiles à prédire à l'avance (d'autant qu'elles peuvent varier dans le temps); comme nous le verrons au chapitre suivant. Cela pourrait justifier l'utilisation d'un maillage uniforme mais on ne pourrait alors obtenir une représentation fiable du transfert thermique qu'avec un maillage très fin imposé à l'ensemble du domaine.

Nous avons donc finalement choisi un maillage irrégulier évoluant suivant une loi exponentielle tel qu'il est représenté sur la figure II.6.

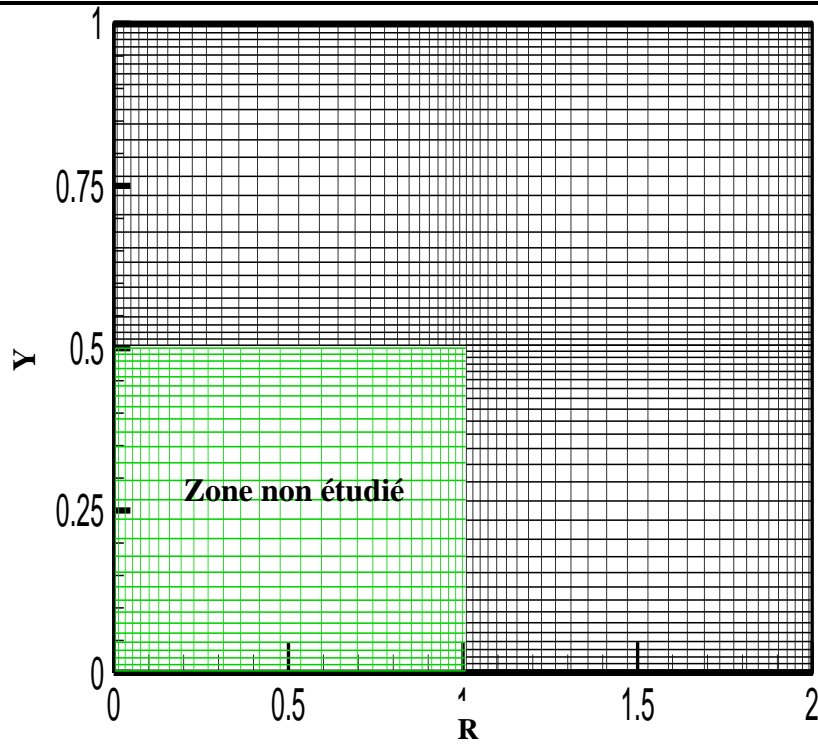


Fig. II.6.: Maillage irrégulier pour une cavité annulaire $A=1$, $X=0.5$, maillage (58×58)

Pour étudier la sensibilité de la solution à la taille du maillage, nous avons comparé plusieurs profils de la vitesse vertical $V = f(R)$ pour différents maillages, (30×30) , (45×45) , (58×58) , (82×82) , et nous avons constaté, sur les profils de vitesse vertical pour $Y=0.5$, que les résultats sont exacte a partir d'un maillage (58×58) , car les deux courbes de (58×58) et (82×82) sont presque confondus ,figure (II.8).

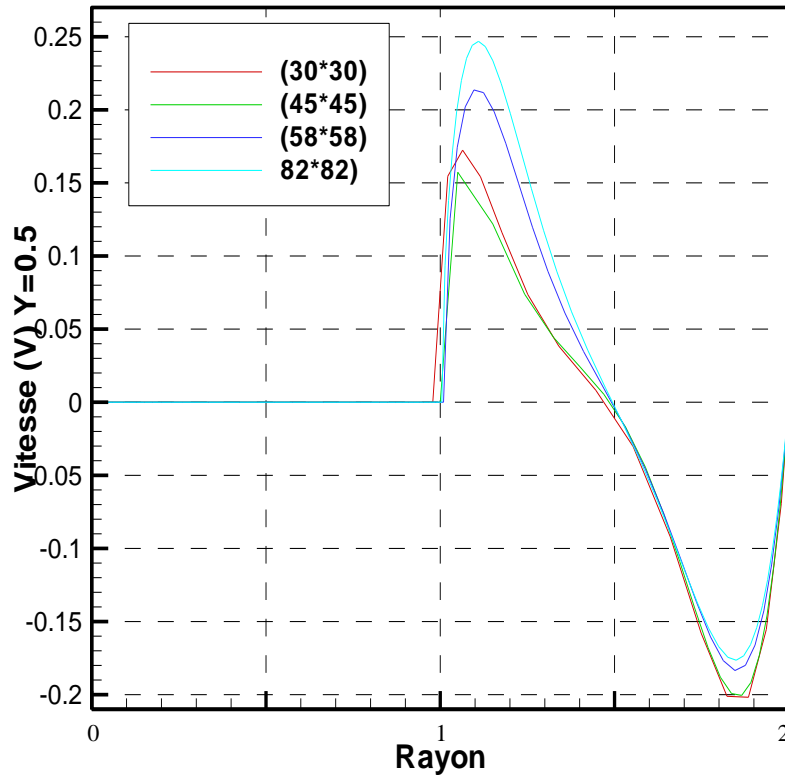


Fig.II.7: Profils de vitesse verticale à différentes mailles pour $Ra=10^5$, $Pr=7$

7. Validation:

7.1 Validation quantitative :

Nous avons testé la validité de notre code de calcul en convection naturelle thermique pour des cavités annulaires dans des configurations déjà étudiées dans la littérature.

Nous avons également testé notre code de calcul sur des cavités annulaires en comparant nos résultats à ceux de R.Kumar et al [22] et de G. De Vahl Davis et al [23] et Thomas H Schwab et al [24] pour différentes valeurs de Prandtl dans le cas d'un écoulement de convection naturelle thermique pure qui correspond à $X=h/H=1$.

a)-

<i>Nombre de Rayleigh</i>	<i>Présent travail</i>	<i>R.Kumar et al.[22]</i>	<i>De Vahl Davis et al.[23]</i>
10^4	2.361	2.355	2.333
5.10^4	3.702	3.718	3.758
10^5	4.535	4.558	4.568

Tableau I. Comparaison du nombre de Nusselt moyen pour la convection naturelle thermique dans une cavité annulaire pour $A=10$ et $K=2$ et $X=1.0$ $Pr=0.7$.

b)- pour un nombre de Rayleigh égale à 10^4 les résultats sont:

<i>Le nombre de Prandtl</i>	<i>Présent travail</i>	<i>Thomas H Schwab et al [24]</i>
0.73	6.12	6.13
1.00	6.20	6.17
7.00	6.36	6.36
25.00	6.31	6.31

Tableau II. Comparaison du nombre de Nusselt moyen pour la convection naturelle thermique dans une cavité annulaire pour $A=1$ et $K=2$ et $X=1.0$ $Ra=10^4$.

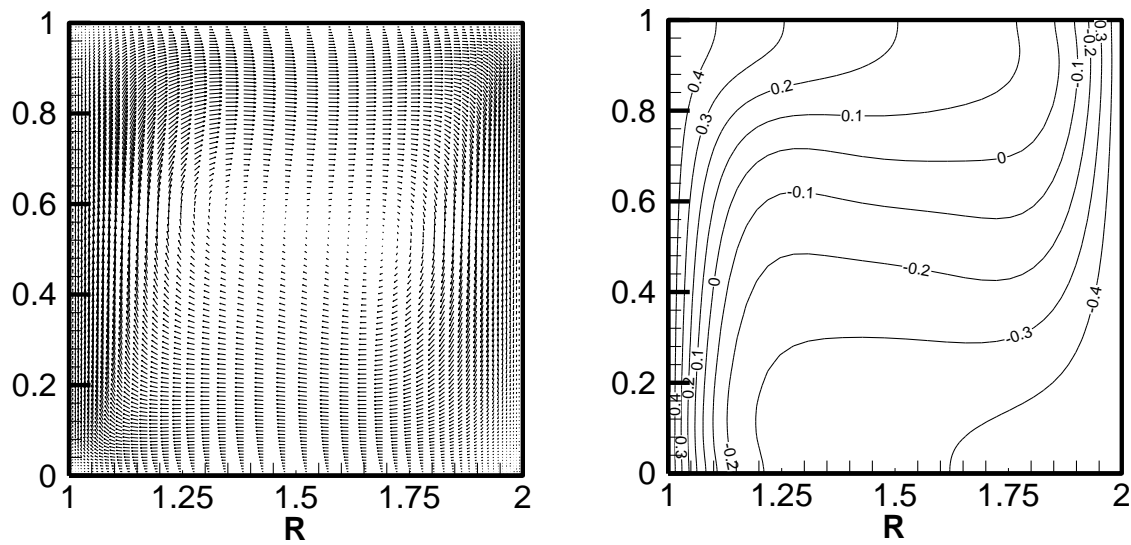
La comparaison est satisfaisante et l'erreur relative commise sur le nombre de Nusselt moyen par rapport aux valeurs proposées par les différents auteurs est de l'ordre de 1% (Table I).

7.2 Validation qualitative :

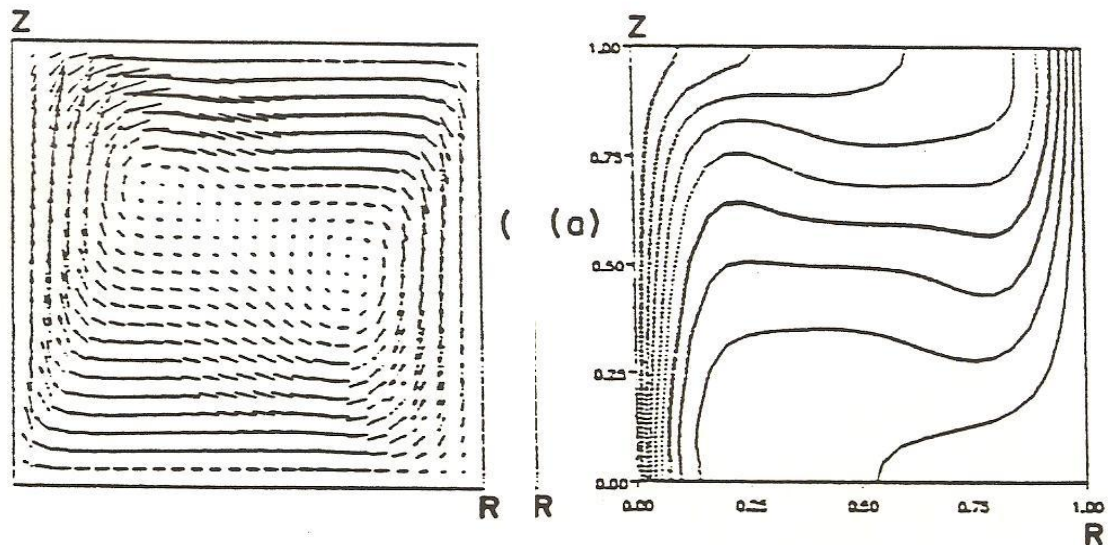
Les figures (II.8) et (II.9) montrent qu'il y a un bon accord qualitatif entre les résultats que nous avons obtenus et ceux de Kulmar [22], ce qui nous a permis de valider notre modèle numérique.

Dans cette partie notre validation consiste à comparer les champs de vitesse et la distribution de température avec les travaux de R.Kumar et al.[22].

c)- Présent travail:

Fig.II.8:Champ de vitesse et isotherme pour $A=1$, $X=1$, $K=2$, $Pr=0.7$, $Ra=5 \times 10^4$

d)- Travail de R.Kumar et al.[22]:

Fig.II.9:Champ de vitesse et isotherme pour $A=1$, $K=2$, $Pr=0.7$, $Ra=5 \times 10^4$

8. Conclusion:

L'étude comparative que nous avons menée par confrontation des résultats obtenus à ceux donnés par d'autres travaux, cela nous permet de valider notre code de calcul ainsi que le modèle mathématique proposer pour le problème.